

Matematica per la Fisica

Docente: Silvia Penati

Scritto del 29/1/2009

Problema 1

Calcolare la trasformata di Fourier della seguente funzione di variabile reale

$$f(x) = x^2 e^{-3|x-1|}$$

Problema 2

Data la funzione

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3(z+1)}$$

- a) Si identifichino e si classifichino tutti i punti singolari.
- b) Si calcolino i residui nei poli.
- c) Si calcolino

$$1) \int_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz, \quad 2) \int_{|z+1|=\frac{1}{2}} f(z) dz, \quad 3) \int_{|z+1|=3} f(z) dz$$

Problema 3

Sia $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione biunivoca. Definito l'operatore

$$U_\alpha : L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2) \quad (U_\alpha f)(\vec{x}) = f(\alpha(\vec{x})) \quad (1)$$

- a) Dire se, ed eventualmente sotto quali condizioni su α , l'operatore è ben definito.
- b) Determinare l'aggiunto.
- c) Determinare sotto quali condizioni su α l'operatore è unitario.
- b) Studiare il caso particolare di

$$\alpha(x, y) = (y, x)$$

e determinare lo spettro puntuale dell'operatore.

Problema 4

In $L^2([0, 1])$ si consideri

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in L^2([0, 1]) | f \in AC[0, 1], f' \in L^2([0, 1]), f(0) = f(1)\}$$

e l'operatore

$$f : \mathcal{D}(A) \rightarrow L^2([0, 1]) \quad Af = f - if' \quad (2)$$

- a) Verificare che A è autoaggiunto.
- b) Determinare lo spettro puntuale e le relative autofunzioni.
- c) L'insieme delle autofunzioni è un s.o.n.c. ? Motivare la risposta.

Problema 5

Si consideri la seguente funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{1 + z^4} \quad (3)$$

- a) Si identifichino e si classifichino i punti singolari.
- b) Si calcolino i residui nelle singolarità.
- c) Scrivere lo sviluppo in serie di potenza per $z \sim 0$.
- d) Quanto vale il seguente integrale reale?

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x^2}{1 + x^4} dx \quad (4)$$

Problema 6

Si consideri l'operatore $A : l^2(\mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{C})$ così definito

$$A\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\} = \{0, \alpha_1, 0, \alpha_3, \dots\} \quad (5)$$

- a) Verificare che è limitato e calcolarne la norma.
- b) Costruire A^\dagger e A^2 .
- c) Determinare lo spettro puntuale.